



AVALIANDO ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO BASEADOS EM COLÔNIA DE FORMIGAS UTILIZANDO MÉTRICAS DE REDES COMPLEXAS

Trabalho de Conclusão de Curso

Engenharia da Computação

Sergio Ferreira Ribeiro

Orientador: Prof. Dr. Carmelo José Albanez Bastos Filho



**UNIVERSIDADE
DE PERNAMBUCO**

**Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
Graduação em Engenharia de Computação**

SERGIO FERREIRA RIBEIRO

**Avaliando Algoritmos de Otimização
Baseados em Colônia de Formigas
Utilizando Métricas de Redes
Complexas**

Monografia apresentada como requisito parcial para obtenção do diploma de Bacharel em Engenharia de Computação pela Escola Politécnica de Pernambuco – Universidade de Pernambuco.

Recife, Dezembro/2013.

MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO

Avaliação Final (para o presidente da banca)*

No dia 13 de 12 de 2013, às 9:00 horas, reuniu-se para deliberar a defesa da monografia de conclusão de curso do discente SERGIO FERREIRA RIBEIRO, orientado pelo professor Carmelo José Albanez Bastos Filho, sob título AVALIANDO ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO BASEADOS EM COLÔNIA DE FORMIGAS UTILIZANDO MÉTRICAS DE REDES COMPLEXAS, a banca composta pelos professores:

Sérgio Campello Oliveira

Carmelo José Albanez Bastos Filho

Após a apresentação da monografia e discussão entre os membros da Banca, a mesma foi considerada:

Aprovada Aprovada com Restrições* Reprovada

e foi-lhe atribuída nota: 9,0 (note)

*(Obrigatório o preenchimento do campo abaixo com comentários para o autor)

O discente terá 07 dias para entrega da versão final da monografia a contar da data deste documento.

SÉRGIO CAMPELLO OLIVEIRA

CARMELO JOSÉ ALBANEZ BASTOS FILHO

* Este documento deverá ser encadernado juntamente com a monografia em versão final.

“Seja a mudança que você quer ver no mundo.”
Dalai Lama

Agradecimentos

Agradeço,

A Deus por ter me dado a melhor família e os melhores amigos que eu poderia ter.

À minha mãe, Zuleida de Melo Ferreira, pelo seu amor, carinho, dedicação e todo apoio para que eu pudesse chegar até aqui. 'Mainha, eu te amo!'. Ao meu pai (*in memoriam*), José Aduino Mendonça Ribeiro, pela sua dedicação e por sempre ter estado presente dando conselhos e me estimulando a querer sempre melhorar mesmo com toda distância que nos separava. 'Pai, obrigado por tudo, onde quer que o senhor esteja, espero que esteja orgulhoso, eu dei o meu melhor. Gostaria muito de poder ouvir do senhor um simples parabéns. Saudades, meu velho'.

Aos meus irmãos, Marcelo Ribeiro e Ronald Ribeiro, por sempre terem desempenhado perfeitamente o papel de irmãos mais velhos, sem todos os conselhos, cobranças e incentivo deles eu não teria chegado a lugar nenhum. Ao meu irmão mais novo, Fernando Ribeiro, por todo companheirismo, diversão, conselhos, madrugadas e madrugadas jogando e por sempre estar por perto quando eu precisei. 'Nando, sem você todo esse tempo não teria passado tão depressa'. 'Irmãos, eu sempre fiz de tudo para não decepcioná-los, espero estar conseguindo'.

À minha namorada, companheira e amiga, Izabella Ribeiro, que esteve sempre ao meu lado desde o começo da graduação, me fazendo sorrir, me ajudando a crescer e me apoiando nos momentos difíceis.

Aos meus amigos, em especial Cristiano Cardoso e Thiago Felix, por fazerem do mundo um lugar mais divertido, sem vocês os finais de semana não teriam a menor graça.

Aos companheiros de sala, que se tornaram verdadeiros irmãos, por todas as horas de estudo juntos, pelos momentos de lazer, pela união e por terem feito com que esses anos fossem os melhores anos da minha vida.

Aos demais amigos que fiz durante a graduação por toda ajuda dada, por estarem sempre a postos e dedicados a ajudar sempre que precisei.

Aos grandes professores que tive o prazer de ter aula, pela dedicação, paciência e maestria, em especial agradeço ao meu orientador, professor Carmelo Bastos, pela orientação com excelência, por sempre estar preparado para ajudar e por confiar no meu trabalho.

Resumo

Este trabalho de conclusão de curso apresenta um estudo de como se pode verificar a convergência de algoritmos de Otimização por Colônia de Formigas (ACO, *Ant Colony Optimization*) utilizando métricas de redes complexas. ACO é uma técnica de inteligência computacional inspirada no comportamento das formigas na natureza e é usada para resolver diferentes problemas de otimização combinatória. O estudo de Redes Complexas é uma área que permite o estudo do comportamento estrutural e dinâmico de redes. Essa área de estudo fornece métricas que permitem a avaliação do estado da rede. No ACO, formigas artificiais constroem uma solução para o problema percorrendo um grafo, durante o deslocamento entre os nós do grafo, cada formiga deposita feromônio nos caminhos que elas utilizaram, formando ao final de cada iteração um grafo de feromônio. Este grafo indica a intensidade de comunicação das formigas. A hipótese deste trabalho é que a aplicação de métricas de redes complexas utilizando o grafo de feromônio como base pode trazer informações sobre o estado de convergência do algoritmo. Foi utilizada uma métrica base de redes complexas conhecida como número de autovalores da matriz Laplaciana com valor zero, que fornece informações sobre a conectividade do grafo analisado. A partir da análise dos resultados obtidos, foi mostrado que é possível avaliar a convergência de uma variação de ACO a partir da métrica proposta.

Abstract

This document presents a study on the convergence of Ant Colony Optimization (ACO) algorithm using Complex Networks metrics. ACO is a computational intelligence technique inspired by the behavior of natural ants. ACO has been used to solve various problems of combinatorial optimization. The study of Complex Networks is a new field, which allows one to analyze the structural and dynamic behavior of networks. Complex Networks provide some metrics that allows one to assess the network behavior. In ACO, artificial ants construct a solution to the problem traversing a graph, during the transition between the nodes of the graph. Each ant deposits pheromone on the paths they have passed, forming a pheromone graph at the end of each iteration. This graph can be used to indicate the communication level among the ants. The hypothesis of this monography relies on the application of Complex Networks metrics over the pheromone graph to recover information about the convergence state of the algorithm. We deployed a well known Complex Networks metrics, called the number of null eigenvalues of the Laplacian matrix, which provides information about the connectivity of the analyzed graph. From the obtained results, we demonstrated that it is possible to assess the convergence of ACO by using the proposed metrics.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	MOTIVAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA	1
1.2	HIPÓTESES E OBJETIVOS	2
1.3	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO	3
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	4
2.1	INTELIGÊNCIA DE ENXAMES	4
2.2	OTIMIZAÇÃO POR COLÔNIA DE FORMIGAS	5
2.2.1	<i>Inspiração baseada em Colônia de Formigas</i>	5
2.2.2	<i>Algoritmo Otimização por Colônia de Formigas</i>	8
2.3	REDES COMPLEXAS	11
2.3.1	<i>Métricas de Redes Complexas</i>	12
3	CONTRIBUIÇÃO	13
3.1	PROPOSTA	13
3.2	ALGORITMO PROPOSTO	16
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	18
4.1	ARRANJO EXPERIMENTAL	18
4.1.1	<i>Problema do Caixeiro Viajante</i>	18
4.1.2	<i>Problemas utilizados</i>	19
4.1.3	<i>Métricas para avaliação dos resultados</i>	19
4.2	PARÂMETROS UTILIZADOS	19
4.2.1	<i>Parâmetro limiar de consideração de conectividade</i>	20
4.2.2	<i>Parâmetros do ACO</i>	20
4.3	EXPERIMENTOS	21
4.3.1	<i>Visualização da matriz de feromônio</i>	21
4.3.2	<i>Resultados para o problema att48</i>	22
4.3.3	<i>Resultados para o problema pr76</i>	24
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	26
5.1	CONCLUSÕES	26
5.2	TRABALHOS FUTUROS	27
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	28

Índice de Figuras

Figura 1. Ilustração de experimento realizado com formigas reais mostrando busca pelo menor caminho.	6
Figura 2. Ilustração de experimento com formigas reais em busca do menor caminho aplicado ao algoritmo ACO.	8
Figura 3. Desenvolvimento da matriz de feromônio até a matriz Laplaciana.....	15
Figura 4. Representação do grafo de feromônio durante a execução do ACO com sete autovalores iguais a zero.....	15
Figura 5. Ilustração do grafo de feromônio durante a execução do ACO com um autovalor igual a zero	22
Figura 6. Avaliação da convergência do ACO no problema Att48 com variação de limiar para $\rho = 0,1$	23
Figura 7. Avaliação da convergência do ACO no problema Att48 com variação de limiar para $\rho = 0,5$	24
Figura 8. Avaliação da convergência do ACO no problema Pr76 com variação de limiar para $\rho = 0,1$	25
Figura 9. Avaliação da convergência do ACO no problema Pr76 com variação de limiar para $\rho = 0,3$	25

Tabela de Siglas e Parâmetros

SIGLAS

ABC – *Artificial Bee Colony* (Colônia de Abelhas Artificiais)

ACO – *Ant Colony Optimization* (Otimização por Colônia de Formigas)

BA – Barabási-Albert (Modelo Barabási-Albert)

PSO – *Particle Swarm Optimization* (Otimização por Enxame de Partículas)

TSP – *Traveling Salesman Problem* (Problema do Caixeiro Viajante)

TSPLIB – *Traveling Salesman Problem Library* (Biblioteca do Problema do Caixeiro Viajante)

PARÂMETROS UTILIZADOS

α – Influência do feromônio

β – Influência da visibilidade

m – Número de formigas

Q – Constante de acréscimo de feromônio

c – Constante de inicialização do feromônio

ρ – Coeficiente de evaporação do feromônio

th – Limiar de consideração de conectividade

1 Introdução

“A mente que se abre a uma nova ideia
jamais volta ao seu tamanho original.”

- **Albert Einstein.**

Neste trabalho de conclusão de curso, foi feita uma avaliação da convergência do algoritmo de otimização por colônia de formigas (ACO, *Ant Colony Optimization*) utilizando métricas de redes complexas. A escolha por elaborar esse tipo de avaliação se deu pelo modo que o ACO foi modelado, de forma que a aplicação das métricas de redes complexas se torna direta considerando a matriz de feromônio gerada pelas formigas artificiais.

Este capítulo apresenta a introdução deste trabalho de conclusão de curso e está organizado em três seções. Na Seção 1.1 é apresentada a motivação para avaliação da convergência dos algoritmos baseados em formigas artificiais. A Seção 1.2 apresenta o objetivo desta avaliação e na Seção 1.3 é descrita a estrutura do restante deste trabalho.

1.1 Motivação e Caracterização do Problema

Proposto por Marco Dorigo *et al.* [1][2], o ACO é uma meta-heurística inspirada no comportamento das formigas na natureza. ACO é um algoritmo de inteligência de enxames que foi concebido após a observação de várias espécies de formigas em busca de fontes de alimento.

O uso de redes complexas permite o estudo do comportamento estrutural e dinâmico de redes utilizando métricas que permitem avaliar detalhes da rede [3], como quantidade de sub-grafos existentes, grau de conectividade, direcionamento da rede, entre outros [4][5].

O ACO é proposto a partir da observação de formigas em movimento em busca de fontes de alimento, o deslocamento dessas formigas, bem como o

feromônio deixado durante o deslocamento podem ser representados por grafos. Os grafos são as possíveis soluções para o problema. Desses grafos, podem ser extraídas informações como a menor distância percorrida, a ordem em que os nós devem ser visitados para uma melhor solução, o grau de conectividade do grafo, a quantidade de sub-grafos existentes, entre outras informações a respeito do comportamento do algoritmo. O ACO será descrito em detalhes na Seção 2.2.

Esses grafos citados anteriormente, tanto o grafo do caminho percorrido, quanto o de feromônio, são redes, nós conectados por arestas, que podem ser facilmente utilizadas para a aplicação das métricas de redes complexas. Enquanto o grafo do caminho percorrido representa o caminho percorrido por cada formiga, permitindo o conhecimento do melhor caminho, o grafo de feromônio representa como está ocorrendo a comunicação entre as formigas e permite extrair o comportamento do algoritmo como um todo. É nesse grafo que a aplicação das métricas de redes complexas se torna interessante. Os conceitos relacionados a redes complexas usados neste trabalho serão apresentados na Seção 2.3.

A motivação para este trabalho está relacionada à possibilidade de extração de novas informações do ACO a partir das métricas de redes complexas e no estudo da importância que estas novas informações podem trazer para avaliar o desempenho e convergência dos algoritmos baseados em ACO. Estas novas informações podem permitir propor melhorias e novas abordagens do algoritmo, além de novos critérios de parada e mecanismos para evitar mínimos locais.

1.2 Hipóteses e Objetivos

O algoritmo de Otimização por Colônia de Formigas é um algoritmo básico e bastante citado em pesquisas que envolvem inteligência de enxames pelo mundo. Atualmente, a execução deste algoritmo permite a resolução de problemas de otimização combinatorial, mas não permite o entendimento de como o algoritmo se comportou para chegar àquele resultado.

Dada esta hipótese, surge a necessidade de um melhor entendimento do funcionamento do ACO, vista a necessidade de se extrair informações relevantes acerca do funcionamento do algoritmo em tempo de execução.

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo a aplicação de métricas de redes complexas, no caso o número de autovalores da matriz Laplaciana com valor zero, para avaliar o desempenho do algoritmo ACO ao longo de sua execução com a finalidade de obter mais informações sobre o estado de convergência do algoritmo.

1.3 Organização do Documento

Este trabalho está organizado em 5 capítulos. No Capítulo 2 são abordados os assuntos básicos necessários para uma melhor compreensão da proposta deste trabalho, como assuntos relativos à inteligência de enxames, uma revisão do ACO e uma explicação sobre Redes Complexas e suas Métricas. Em seguida, no Capítulo 3, é realizada uma explanação da proposta de contribuição deste trabalho. No Capítulo 4 são apresentados os experimentos e resultados obtidos. E, por fim, no Capítulo 5 são discutidas as conclusões deste trabalho e as propostas para trabalhos futuros.

2 Fundamentação Teórica

“Nenhuma grande descoberta foi feita
jamais sem um palpite ousado.”

- **Isaac Newton.**

Neste capítulo é apresentada a base necessária para compreensão da proposta deste trabalho. Na Seção 2.1 é apresentada uma breve introdução de inteligência de enxames. A Seção 2.2 apresenta uma revisão sobre Otimização por Colônia de Formigas e a Seção 2.3 uma explicação sobre Redes Complexas.

2.1 Inteligência de Enxames

Inteligência de enxames (*Swarm Intelligence*) é um ramo da Inteligência Computacional que utiliza agentes reativos simples se comunicando com o intuito de resolver problemas [6]. Surgiu a partir de observações e estudos do comportamento de seres vivos em busca de sua sobrevivência (normalmente em busca de alimento), estes seres vivos são representados por uma estrutura simples que se comunicam entre si trocando informações sobre o sucesso durante o processo corrente [7].

Estudos com técnicas baseadas em enxames levaram à construção de algoritmos de otimização bastante eficientes. Como por exemplo, a observação de um bando de pássaros em busca de alimento permitiu a criação do algoritmo baseado em enxame de partículas (PSO, *Particle Swarm Optimization*) [8][9]. Também a observação de abelhas em busca de fontes promissoras de alimentos serviu como fonte para criação vários algoritmos de otimização, sendo um dos mais famosos o baseado em Colônia de Abelhas Artificiais (ABC, *Artificial Bee Colony*) [10][11][12]. Entre outros algoritmos interessantes, a observação de formigas e como elas se organizavam na busca por fontes de alimentos, inspirou o desenvolvimento do algoritmo de otimização baseado em colônia de formigas (ACO, *Ant Colony Optimization*) [1][13]. O ACO foi o primeiro algoritmo de inteligência de enxames a

ser desenvolvido e este trabalho utiliza o ACO em sua proposta. Por isso, o ACO será aprofundado na próxima seção.

2.2 Otimização por Colônia de Formigas

O algoritmo de otimização por colônia de formigas, ACO, compõe uma classe de algoritmos de inteligência de enxames, cuja representação de sucesso se dá por interação das formigas artificiais com o ambiente. Esta seção se dedica a apresentar mais detalhes sobre o ACO.

2.2.1 Inspiração baseada em Colônia de Formigas

O ACO foi inspirado na observação do comportamento de formigas na natureza, foram feitos experimentos com formigas reais de modo a projetar o algoritmo [2][6]. Nessas observações, percebeu-se que em várias espécies de formigas, elas depositam uma substância chamada feromônio por onde passam, enquanto estão em busca de uma fonte de alimento. Este feromônio funciona como a comunicação desta formiga com as outras que também estão em busca da fonte de alimento, a presença do feromônio influencia na escolha do caminho a seguir pelas outras formigas, isto é, elas tendem a seguir o caminho com maior concentração de feromônio [1][14]. O feromônio depositado forma um caminho que permite às formigas encontrarem as boas fontes de alimento que haviam sido encontradas anteriormente por outras formigas [2][14].

Na Figura 1 está ilustrado um experimento realizado com as formigas, onde elas foram conectadas à fonte de alimento por um caminho direto (AE) de forma que elas eram capazes de chegar a fonte de alimento apenas seguindo em frente, onde a fonte de alimento está em A e o formigueiro em E ou vice-versa, como pode ser visto na Figura 1.a. Após algum tempo com as formigas se locomovendo entre a fonte de alimento e o formigueiro, um obstáculo foi posicionado no meio do caminho, assim quando as formigas chegam ao ponto B ou D (dependendo do caminho que estão seguindo), cada formiga precisa decidir por qual lado seguirá (Figura 1.b). Esta escolha é influenciada pela intensidade de feromônio no caminho da direita e no caminho da esquerda, uma maior intensidade de feromônio indica uma maior

probabilidade de a formiga escolher este caminho. Inicialmente a probabilidade de a formiga escolher o caminho mais curto, no caso o BCD, é a mesma dela escolher o caminho BHD, pois não existe feromônio em nenhum dos dois caminhos, porém o caminho BCD é mais curto que o BHD e por isso as formigas que escolherem este caminho chegaram mais rápido ao ponto D. Como consequência, a quantidade de formigas que passarão pelo caminho BCD por unidade de tempo será maior e isso irá fazer com que mais feromônio seja depositado neste caminho, com o passar do tempo cada vez mais formigas serão influenciadas pelo feromônio no caminho BCD e a probabilidade de escolher o caminho mais curto será maior (Figura 1.c) [13][14].

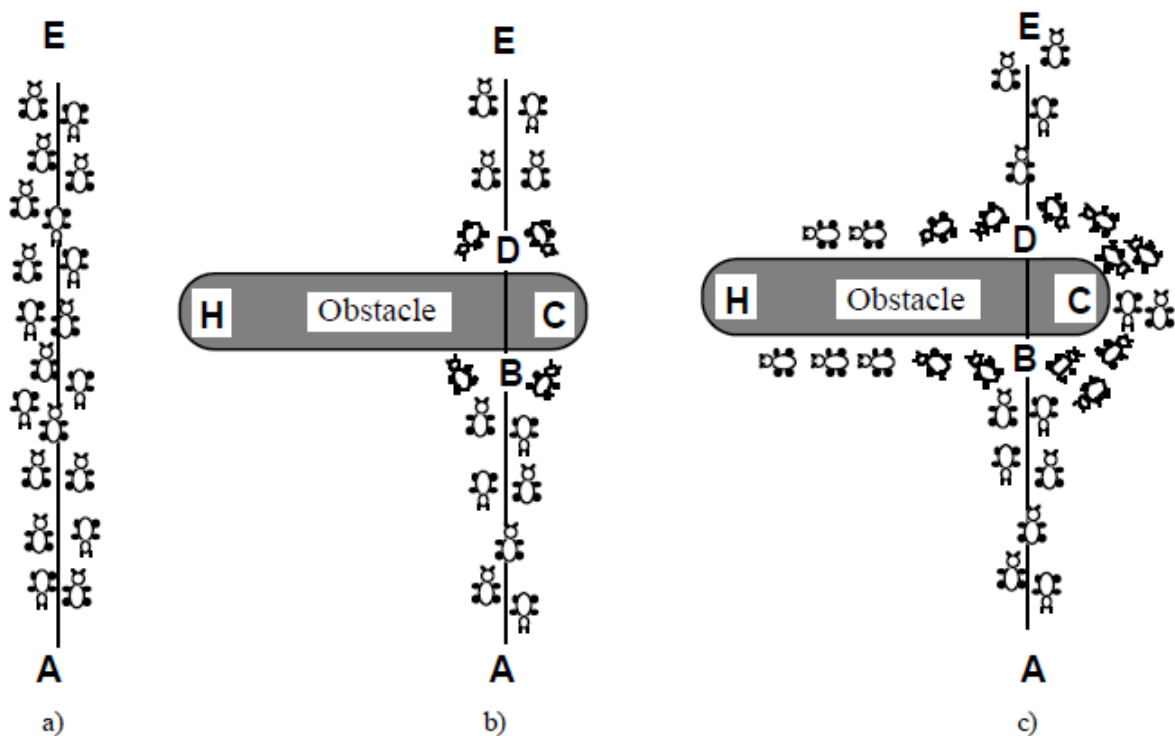


Figura 1. Ilustração de experimento realizado com formigas reais mostrando busca pelo menor caminho.

Para melhor compreensão, suponha que a distância entre D e H é igual a distância entre B e H e igual a distância entre B e D (passando por C) e que essa distância é igual a 1. Considere que C está posicionado exatamente no meio entre B e D, fazendo as distâncias BC e CD serem iguais a 0,5 como pode ser visto na Figura 2. a.

Considerando iterações a cada intervalo de tempo: $t = 0, 1, 2, \dots, t_{max}$. Suponha que 30 formigas saem do ponto A até o ponto B e que 30 formigas saem do ponto E até o ponto D a cada unidade de tempo t , que cada formiga se move com velocidade de 1 por unidade de tempo, que enquanto se locomovem as formigas deixam uma quantidade 1 de feromônio e que o feromônio evapora por completo e instantaneamente entre sucessivos intervalos de tempo ($t+1, t+2$).

No tempo $t = 0$, Figura 2.b, não existe feromônio em nenhuma das alternativas de caminho e 30 formigas estão em B e 30 em D. Como não existe feromônio para influenciar na escolha do caminho, a formiga escolherá aleatoriamente um caminho para seguir, sendo assim considera-se que em média metade das formigas escolhe uma alternativa e metade a outra.

No tempo $t = 1$, Figura 2.c, 30 novas formigas saem de A e chegam em B e 30 novas formigas saem de E e chegam em D. Neste momento, existe feromônio em ambos os caminhos e isso irá influenciar na escolha do caminho a ser seguido pela formiga (lembrando que se uma formiga anda a uma velocidade de 1 por unidade de tempo e que as distâncias BD (via C), BH e DH são iguais a 1, tem-se uma quantidade de feromônio entre B e H igual a 15, entre D e H igual a 15 e entre B e D igual a 30, pois no mesmo tempo que uma formiga vai de B a H ela vai de B a D passando por C). Assim, mais feromônio foi depositado no caminho mais curto. Então neste instante de tempo a probabilidade das formigas escolherem o caminho BD (via C) é maior que a probabilidade delas escolherem BH ou DH.

Este processo se repete até que a probabilidade de escolha do caminho mais curto seja majoritária e todas as formigas sigam por esse caminho [1][2].

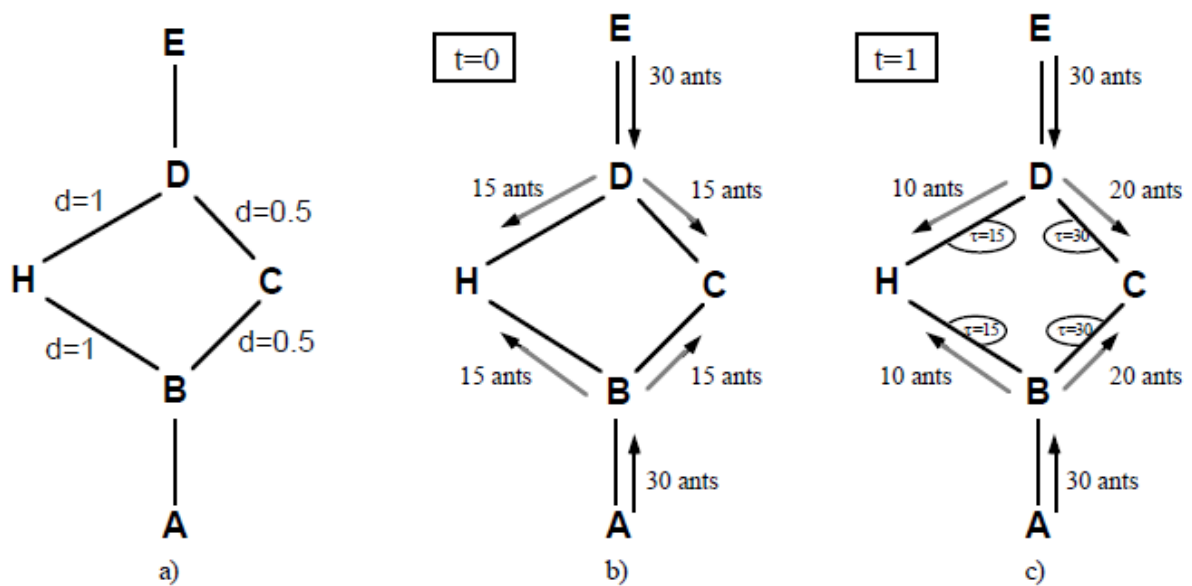


Figura 2. Ilustração de experimento com formigas reais em busca do menor caminho aplicado ao algoritmo ACO.

Baseado neste experimento com colônia de formigas reais foi desenvolvido o algoritmo ACO, porém com o intuito de otimizar o algoritmo, algumas modificações foram feitas nas formigas artificiais [2]:

- Formigas artificiais terão alguma memória;
- elas não serão completamente cegas;
- elas irão viver num ambiente onde o tempo é discreto.

2.2.2 Algoritmo Otimização por Colônia de Formigas

Para explicação do algoritmo ACO será utilizado o problema do caixeiro viajante (TSP, *Traveling Salesman Problem*) [12]. Supondo um conjunto de n cidades, o TSP pode ser definido como um problema para encontrar o menor caminho para fechar um *tour* entre todas as cidades sem repeti-las. O TSP será mais detalhado na Seção 4.1.1.

Deixe $b_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) ser o número de formigas na cidade i no tempo t e m igual ao número total de formigas. Cada formiga é um agente reativo simples com as seguintes características:

- ela escolhe uma cidade para ir baseada na probabilidade que está em função da distância entre as cidades e da quantidade de feromônio naquele caminho;
- para forçar uma formiga a fazer o *tour* correto, ou seja, não visitar uma cidade mais de uma vez, as conexões para uma cidade já visitada são desativadas até que o *tour* se complete (isto é controlado pela lista tabu);
- ao fim de cada *tour* a formiga deixa feromônio em cada aresta que ela passou.

Suponha que $y_{ij}(t)$ seja a intensidade de feromônio em uma aresta no tempo t . A cada iteração cada formiga deve completar um *tour* e deixar o feromônio nas arestas que ela passou, a atualização da intensidade do feromônio $y_{ij}(t+1)$ é calculada utilizando

$$y_{ij}(t+n) = \rho \cdot y_{ij}(t) + \Delta y_{ij}, \quad (1)$$

onde i e j representam a cidade de saída e de chegada respectivamente, ρ é o coeficiente que representa a evaporação do feromônio entre t e $t+n$ e é sempre menor que um. A quantidade de feromônio que será deixada na aresta é representada por Δy_{ij} e é calculada por Q/L_k , se a formiga passou por esse caminho no seu *tour*, ou 0 caso ela não tenha passado. Nesta fórmula, Q é uma constante e L_k é a distância percorrida pela formiga em seu *tour*.

A cada iteração do algoritmo, cada formiga completa um *tour* entre todas as cidades e deposita feromônio nas arestas utilizadas por ela em seu *tour*. Cada formiga inicia o algoritmo numa cidade aleatória e o feromônio nas arestas é inicializado com um valor constante c passado como parâmetro. A formiga escolhe uma cidade para visitar baseada na probabilidade, escolhendo sempre a cidade de maior probabilidade, após visitar todas as cidades a formiga terminou o seu *tour*, após todas as formigas terminarem seus *tours* o feromônio é atualizado e a iteração é incrementada.

A probabilidade da formiga visitar uma cidade é influenciada pela quantidade de feromônio que encontra-se no caminho e a distância entre as cidades. Estes dois valores também são influenciados por dois parâmetros do ACO, chamados de α e β , que indicam respectivamente a influência do feromônio e a influência da distancia [1][2][13].

Quando uma formiga escolhe uma cidade para visitar, esta cidade é adicionada na lista tabu, esta lista guarda todas as cidades que a formiga visitou em seu *tour* em ordem de visita, caso a formiga encontre um melhor caminho, o algoritmo utiliza a lista tabu para indicar o melhor caminho encontrado até o momento.

Formalmente o algoritmo do ACO está indicado abaixo:

1. Inicialização:
 - Atribuir 0 a t (contador de tempo);
 - Atribuir 0 a NC (Número de iterações);
 - Para cada aresta inicializar o valor do feromônio com c ;
 - Colocar as formigas em cidades aleatórias;
2. Atribuir 1 a s (s é o índice da lista tabu)
 - Para todas as formigas inicializar sua lista tabu com a cidade inicial;
3. Repetir até que a lista tabu esteja cheia
 - $s := s + 1$;
 - Para todas as formigas, fazer
 - Escolher a cidade que irá se mover;
 - Mover-se para a cidade escolhida;
 - Adicionar a cidade escolhida a tabu(s);
4. Para todas as formigas, fazer
 - Mover-se voltando por cada cidade que passou;
 - Calcular a distância percorrida no tour;
 - Atualizar a menor distância encontrada;
 - Para cada aresta fazer
 - Para cada formiga fazer
 - Calcular a quantidade de feromônio que será depositado;
5. Para cada aresta atualizar o feromônio
 - $NC := NC + 1$;
6. Se o critério de parada foi alcançado
 - Parar e indicar o menor caminho;
 - Senão
 - Esvaziar as listas tabu de todas as formigas;
 - Voltar para o passo 2.

2.3 Redes Complexas

Redes Complexas é o estudo das fundações teóricas da estrutura da rede, de seu comportamento dinâmico e da aplicação de redes para vários sub-campos. Existem algumas redes que apresentam características específicas, tanto na sua estrutura, quanto em seu comportamento, para analisar estas características são utilizadas métricas de redes complexas [5][15].

Proposto por Barabási e Albert [16][17], o modelo conhecido como Barabási-Albert (modelo BA) consiste em um algoritmo para geração de redes utilizando um mecanismo de ligação preferencial. O modelo BA parte do princípio de que as redes estão evoluindo e crescendo continuamente, por isso a noção das redes seguindo uma evolução faz sentido em enxames, uma vez que os indivíduos estão em constante atualização [3]. Isto mostra que existem elementos em comum nestas duas áreas do conhecimento. Além disso, como há a distinção de qualidade dos indivíduos, pode-se também identificar a ideia de ligação preferencial presente no ACO [16][18].

As redes discutidas neste trabalho são modeladas como grafos. Um grafo G consiste de um par $[V(G), E(G)]$, onde o conjunto $V(G)$ é um conjunto de vértices e $E(G)$ um conjunto de arestas. Qualquer grafo G que seja simétrico e sem pesos nas arestas pode representar a matriz de adjacência $A(G)$, onde a diagonal principal é sempre igual a zero, pois um nó não pode se conectar a ele mesmo, e o valor nas outras entradas são um se houver conexão entre os dois nós e zero caso não haja conexão [5], a matriz de adjacência é utilizada para o cálculo da matriz Laplaciana. A matriz Laplaciana tem como diagonal principal a quantidade de elementos não nulos contidos na linha e os outros elementos da linha negativos, fazendo com que a soma de cada linha seja igual a zero. Outra matriz utilizada para o cálculo da matriz Laplaciana é a matriz de grau (do inglês, *Node Degree*) $D(G)$, onde a diagonal principal é igual a soma de todos os valores da linha e os outros valores são iguais a zero. A matriz Laplaciana $L(G)$ é a subtração da matriz $D(G)$ pela matriz $A(G)$, $L(G) = D(G) - A(G)$.

2.3.1 Métricas de Redes Complexas

Várias propriedades do grafo podem ser inferidas utilizando a matriz Laplaciana. Os autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ de L são importantes, pois eles relatam várias propriedades do grafo. Supondo que L é simétrico, todos os autovalores são reais e não-negativos. A primeira propriedade extraída dos autovalores é o número de componentes do grafo, pois o número de autovalores nulos corresponde exatamente a quantidade de sub-grafos independentes no grafo G [5]. No Capítulo 3, encontra-se uma explicação de como essa métrica foi utilizada para avaliação da convergência do algoritmo baseado em colônia de formigas.

Outra propriedade vem do segundo menor autovalor λ_2 de L , chamada de conectividade algébrica de G . A magnitude deste valor mostra o quão conectado o grafo está. O valor é maior que zero, se e somente se, G é um grafo conectado.

A matriz de adjacência $A(G)$ pode também ser utilizada para fornecer informações sobre a estrutura do grafo. O espectro de um grafo pode ser definido como o conjunto de autovalores da matriz de adjacência [5].

Estas são algumas métricas de redes complexas que fornecem informações sobre o grafo, este trabalho utiliza apenas a quantidade de autovalores iguais a zero e por isso não detalha outras métricas usadas em Redes Complexas.

3 Contribuição

“A persistência é o menor caminho do
êxito.”

- **Charles Chaplin.**

Este capítulo apresenta um detalhamento de como é possível avaliar a convergência do ACO para o TSP, mostrando como a métrica de Redes Complexas foi utilizada.

3.1 Proposta

A proposta deste trabalho é utilizar métricas de redes complexas para avaliação do algoritmo de otimização baseado em colônia de formigas (ACO, *Ant Colony Optimization*), mais especificamente, o trabalho propõe avaliar o estado de convergência do algoritmo ACO utilizando uma métrica de redes complexas conhecida como número de autovalores iguais a zero.

Com o objetivo de compreender melhor as características do ACO surge a proposta de utilizar métricas de redes complexas para extrair informações durante a execução do algoritmo. A proposta é ter um maior conhecimento do estado de convergência do ACO a cada iteração e como o número de autovalores iguais a zero informam a quantidade de sub-grafos no grafo, esta foi a métrica utilizada, de modo que quanto menos é a quantidade de autovalores iguais a zero, maior é a comunicação entre as formigas e mais próximo o algoritmo está de convergir. Ao final de cada iteração, foi realizado o cálculo dos autovalores da matriz Laplaciana considerando como referência para conexão entre os nós, a matriz de feromônio. Neste momento outras métricas poderiam ser aplicadas e outras informações extraídas, porém neste trabalho, por questões de escopo, outras métricas não foram aplicadas.

Assim como na proposta original do ACO, foi utilizado o problema do caixeiro viajante (TSP, *Traveling Salesman Problem*) para o desenvolvimento da avaliação

do ACO e o mesmo será utilizado para a explicação desta proposta. O TSP será melhor explicado na Seção 4.1.1.

Durante a execução do ACO para resolver o TSP, formigas artificiais percorrem os caminhos existentes entre as cidades em busca do menor caminho e durante cada iteração atualizam o grafo de caminho percorrido e o grafo de feromônio [2][13].

Para a obtenção da matriz Laplaciana é utilizado o grafo de feromônio, este grafo é atualizado ao final de cada iteração de acordo com o movimento das formigas, ao passar por uma aresta, uma formiga artificial deixa certa quantidade de feromônio naquela aresta, dependendo da distância percorrida e da constante Q que representa o acréscimo de feromônio [1][2][14]. O grafo de feromônio possui valores reais e a diagonal principal igual a zero, pois uma formiga não pode sair de um nó para ele mesmo, este grafo de feromônio será utilizado para a construção da matriz de adjacência. Como a matriz de adjacência deve ser simétrica para que a métrica possa ser usada com sucesso, foi necessário desenvolver um modo para escolher se os elementos da matriz de adjacência serão zero ou um, baseados no valor da matriz de feromônio.

Existem vários modos de transformar uma matriz com valores reais numa matriz como a matriz de adjacência, apenas com zeros e uns. É possível normalizar a matriz de feromônio ou calcular uma média dos valores para se escolher um valor de limiar. Então, pode-se definir que tudo que está abaixo do limiar será igual a zero e que tudo que está a cima deste limiar será igual a um. Neste trabalho não foi feita uma média dos valores, o valor do limiar se tornou um parâmetro do algoritmo e foi feito um estudo paramétrico variando o valor do limiar.

A matriz Laplaciana é obtida a partir da matriz de adjacência e da matriz de grau, onde $L(G) = D(G) - A(G)$, esta matriz é passada para o cálculo dos autovalores e a quantidade de autovalores é igual a quantidade de linhas ou colunas da matriz Laplaciana [2].

A Figura 3 representa os passos para chegar à matriz Laplaciana, partindo da matriz de feromônio, passando pela matriz de adjacência e chegando à matriz Laplaciana subtraindo a matriz de grau pela matriz de adjacência.

$$\begin{array}{ccc}
 0 & 0,8 & 0,1 \\
 0,8 & 0 & 0,7 \\
 0,1 & 0,7 & 0
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{ccc}
 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{ccc}
 1 & -1 & 0 \\
 -1 & 2 & -1 \\
 0 & -1 & 1
 \end{array}$$

Figura 3. Desenvolvimento da matriz de feromônio até a matriz Laplaciana.

Também foi desenvolvida uma funcionalidade para tirar fotos do estado do algoritmo a qualquer iteração, ou seja, a qualquer iteração é possível visualizar o estado do grafo de distância e do grafo de feromônio. A Figura 4 representa o grafo de feromônio durante a execução do ACO para resolver o TSP. Cada nó representa uma cidade e este problema possui 48 cidades, esta visualização permite compreender melhor o funcionamento do algoritmo e fazer um comparativo com os valores encontrados pela métrica. Nesta figura, por exemplo, o número de autovalores iguais a zero é 7 e pode-se visualizar que o grafo possui 6 sub-grafos visíveis na imagem e um sétimo que não está visível, pois é apenas um nó que não está conectado com ninguém.

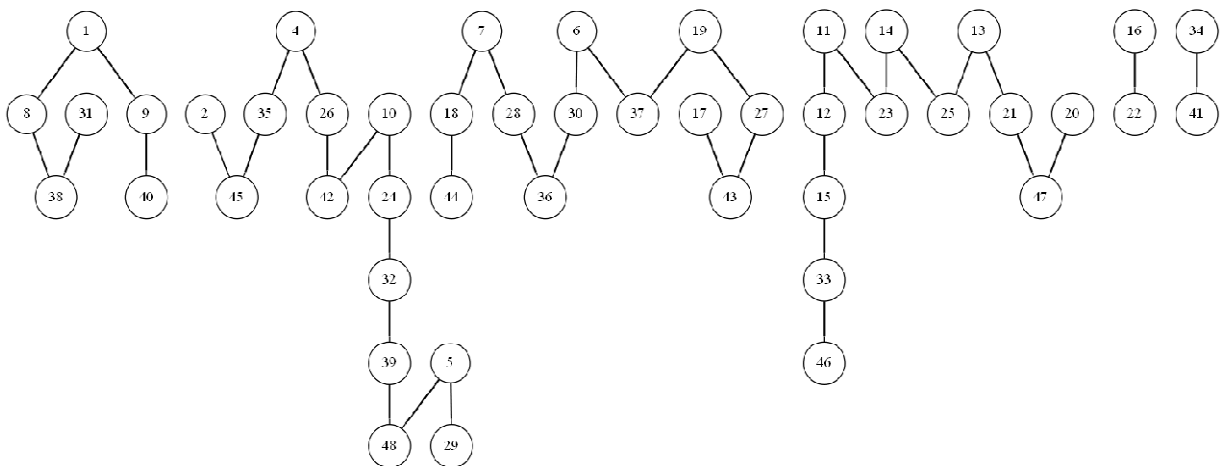


Figura 4. Representação do grafo de feromônio durante a execução do ACO com sete autovalores iguais a zero.

Em resumo, o algoritmo deste trabalho propõe o cálculo dos autovalores ao final de cada iteração. Para isso, é necessário o cálculo da matriz Laplaciana a partir

da matriz de feromônio. Também permitiu-se a visualização do grafo durante a execução da iteração escolhida, de modo a facilitar a compreensão do estado do algoritmo.

3.2 Algoritmo Proposto

O algoritmo implementado neste trabalho foi uma pequena variação do algoritmo do ACO, inserindo apenas o cálculo da matriz Laplaciana, o cálculo das métricas e o gerador de imagens do grafo.

Abaixo segue o pseudo-código do algoritmo utilizado para os experimentos:

1. Inicialização:
 - Atribuir 0 a t (contador de tempo);
 - Atribuir 0 a NC (Número de iterações);
 - Para cada aresta inicializar o valor do feromônio com c ;
 - Colocar as formigas em cidades aleatórias;
2. Atribuir 1 a s (s é o índice da lista tabu)
 - Para todas as formigas inicializar sua lista tabu com a cidade inicial;
3. Repetir até que a lista tabu esteja cheia
 - $s := s + 1$;
 - Para todas as formigas fazer
 - Escolher a cidade que irá se mover;
 - Mover-se para a cidade escolhida;
 - Adicionar a cidade escolhida a tabu(s);
4. Para todas as formigas fazer
 - Mover-se voltando por cada cidade que passou;
 - Calcular a distância percorrida no *tour*;
 - Atualizar a menor distância encontrada;
 - Para cada aresta fazer
 - Para cada formiga fazer
 - Calcular a quantidade de feromônio que será depositado;
5. Para cada aresta atualizar o feromônio
 - $NC := NC + 1$;
6. Calcular a matriz de adjacência;
 - Calcular matriz Laplaciana;
 - Calcular os autovalores;
 - Contar a quantidade de autovalores iguais a zero;
 - Se deseja visualizar o grafo
 - Imprimir o grafo de feromônio;

- Salvar os resultados desta iteração;
- 7. Se o critério de parada foi alcançado
 - Parar e indicar o menor caminho;
 - Senão
 - Esvaziar as listas tabu de todas as formigas;
 - Voltar para o passo 2.

A diferença entre o pseudo-código apresentado e o pseudo-código do ACO é a criação de um novo passo entre os passos 5 e 6 do algoritmo original, onde são realizados os cálculos das métricas e visualização dos grafos.

O algoritmo foi desenvolvido utilizando linguagem Java na plataforma Eclipse. Os parâmetros para simulação são passados via código, pois não foi desenvolvida uma interface gráfica para o sistema. Foi utilizada uma ferramenta chamada *Graphviz* para visualização dos grafos e a ferramenta *Origin Pro 8* para criação dos gráficos.

4 Resultados e Discussão

“A alegria está na luta, na tentativa, no sofrimento envolvido e não na vitória propriamente dita.”

- **Mahatma Gandhi.**

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns conceitos necessários para compreensão da experimentação, o arranjo experimental definido, mostrar e comentar os resultados encontrados e apresentar os ganhos que este estudo pode trazer.

4.1 Arranjo Experimental

Assim como utilizado na proposta original do ACO por Marco Dorigo [2], foram utilizados problemas do caixeiro viajante (TSP, *Traveling Salesman Problem*) para execução do ACO.

Para todos os problemas e diferentes variações de parâmetros foram executadas 30 simulações e cada simulação com 1000 iterações.

4.1.1 Problema do Caixeiro Viajante

O problema do caixeiro viajante é um famoso e importante problema de otimização combinatória. O objetivo deste problema é encontrar o menor caminho de modo que todas as cidades sejam visitadas exatamente uma vez e que ao final retorne a cidade de partida. Formalmente, o TSP pode ser definido como a seguir. As distâncias entre n cidades são guardadas na matriz de distâncias \mathbf{D} com os elementos d_{ij} onde $i, j = 1 \dots n$ e a diagonal principal da matriz \mathbf{D} , $d_{ii} = 0$. Um caminho pode ser representado por um ciclo de permutação π de $\{1, 2, \dots, n\}$, onde $\pi(i)$ representa a cidade que segue a cidade i no caminho. O TSP é um problema de otimização para encontrar a permutação π que minimize a distância percorrida no caminho [19].

Os dados do problema são a quantidade de cidades e o valor das distâncias entre cada cidade. Pode-se também, ao invés de considerar apenas a distância entre cidades, considerar o custo como um todo da viagem entre uma cidade e outra, fazendo com que o problema fique mais genérico.

4.1.2 Problemas utilizados

Para a execução do ACO foram utilizados dois problemas do caixeiro viajante encontrados na TSPLIB [20], estes problemas são o att48 e o pr76, ambos são TSP simétricos e possuem todas as cidades conectadas entre si.

O att48 é um problema com 48 cidades e com solução ótima conhecida igual a 10628. O outro problema escolhido, o pr76, possui 76 cidades e tem como solução ótima conhecida 108159.

4.1.3 Métricas para avaliação dos resultados

Os resultados aqui apresentados não serão utilizados para comprovar melhor desempenho do algoritmo, o foco dos resultados é apresentar os valores encontrados após a aplicação da métrica e comentar as informações extraídas desses valores.

Para a validação do uso de métricas de redes complexas para avaliação do ACO este trabalho utiliza o cálculo dos autovalores do grafo e a quantidade de autovalores nulos no algoritmo em tempo de execução.

4.2 Parâmetros utilizados

Os parâmetros utilizados nos experimentos são semelhantes aos parâmetros propostos por Marco Dorigo *et al.* na proposta original do ACO [1][2], porém foi necessária a adição de um novo parâmetro, chamado de limiar de consideração de conectividade e representado por *th*, que será detalhado na próxima sub-seção.

4.2.1 Parâmetro limiar de consideração de conectividade

Como já foi comentado anteriormente, para a aplicação das métricas de redes complexas foi utilizada a matriz de feromônio formada durante a execução do ACO. Esta matriz de feromônio varia de acordo com as iterações do ACO e indica a influência de uma formiga para as outras, por isso com base na matriz de feromônio chega-se a matriz de adjacência. O limiar, chamado de th , é utilizado exatamente na transformação da matriz de feromônio em matriz de adjacência, pois na matriz de feromônio tem-se a diagonal principal igual a zero e em qualquer outro elemento da matriz pode-se ter um valor real, contanto que a matriz se mantenha simétrica. A matriz de adjacência utilizada no cálculo das métricas deve possuir a diagonal principal igual a zero e os valores 1 ou 0 em qualquer outro elemento, indicando conexão ou não e com a mesma obrigatoriedade que a matriz se mantenha simétrica. Por esse motivo, foi decidido utilizar um limiar, onde evita-se que conexões fracas na matriz de feromônio sejam consideradas conexões na matriz de adjacência. Então, se o valor do feromônio é menor que o limiar ele será zero na matriz de adjacência e caso seja maior ou igual ele será um.

Os valores para o limiar foram variados de acordo com o problema, como o pr76 possui mais cidades e as distâncias entre as cidades são maiores, foi necessário utilizar limiares menores, enquanto no att48 os limiares foram maiores. Os valores utilizados no limiar para a pr76 variaram entre 0,2 e 0,6, enquanto para a att48 variaram entre 0,8 e 1,2.

4.2.2 Parâmetros do ACO

Foram utilizados os parâmetros propostos no ACO original, também foram utilizados, na sua grande maioria, valores fixos para esses parâmetros, exceto pelo coeficiente de evaporação do feromônio, que é chamado de ρ , e foi variado entre 0,1; 0,3; 0,5; 0,7 e 0,9.

Os valores utilizados para os outros parâmetros do ACO foram:

- Influência do feromônio, $\alpha = 1$;
- influência da visibilidade, $\beta = 1$;

- número de formigas, $m = 100$;
- constante de acréscimo de feromônio, $Q = 100$;
- constante de inicialização do feromônio, $c = 0,01$.

4.3 Experimentos

Foram realizados dois tipos de experimentos, o primeiro com o intuito de validar o valor encontrado dos autovalores comparando com o que o grafo representava, desenhando o grafo para ser possível visualizá-lo da melhor forma possível, para contar quantidade de sub-grafos existentes.

O segundo experimento observou a evolução da quantidade de autovalores iguais a zero a cada iteração, sendo possível acompanhar a evolução do algoritmo e perceber quando o mesmo estagnava.

4.3.1 Visualização da matriz de feromônio

Na Figura 5 é possível visualizar um exemplo de grafo de feromônio utilizado para verificação da quantidade de sub-grafos existentes e fazer uma comparação com a quantidade de autovalores iguais a zero, é possível verificar que todo o grafo está conectado e por isso existe apenas um autovalor igual a zero.

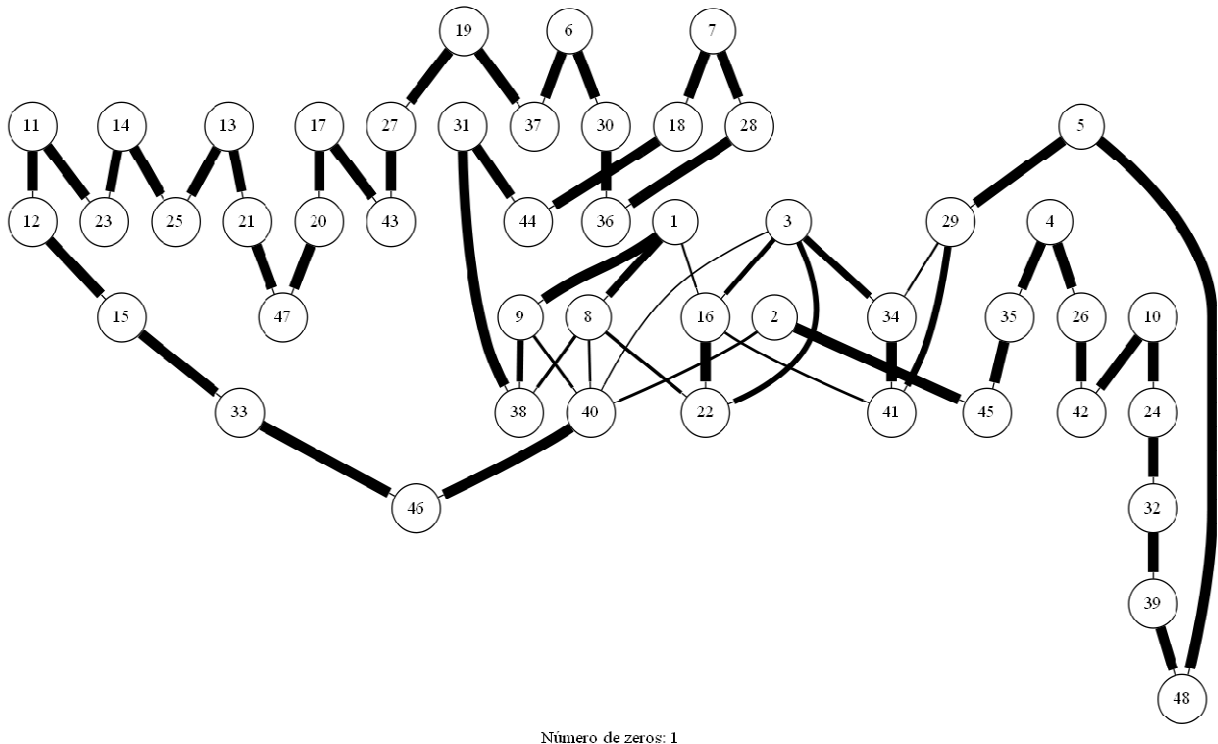


Figura 5. Ilustração do grafo de feromônio com diferença de quantidade de feromônio representada pela espessura da aresta durante a execução do ACO com um autovalor igual a zero

Na figura também é possível observar que algumas conexões estão mais grossas e outras mais finas, isso se dá pelo fato de haver mais feromônio em algumas conexões que em outras.

4.3.2 Resultados para o problema att48

Para as simulações utilizando o problema att48, tomou-se o intervalo do resultado apenas das 50 primeiras iterações e no gráfico foi utilizada escala logarítmica, isso foi feito para uma melhor visualização do ponto importante do gráfico. O ponto onde a quantidade de autovalores iguais a zero deixa de diminuir e indica uma estagnação do algoritmo. Pode-se dizer que se o algoritmo parou de evoluir neste ponto, a execução poderia ser parada e não seria necessário aguardar até o final das iterações. A Figura 6 representa a evolução dos autovalores iguais a zero ao longo de 50 iterações, o valor de ρ utilizado nesta simulação foi 0,1 e o

gráfico mostra um comparativo dos valores do limiar th de 0,8 até 1,2. Pode-se perceber que poucas iterações são necessárias para atingir a convergência.

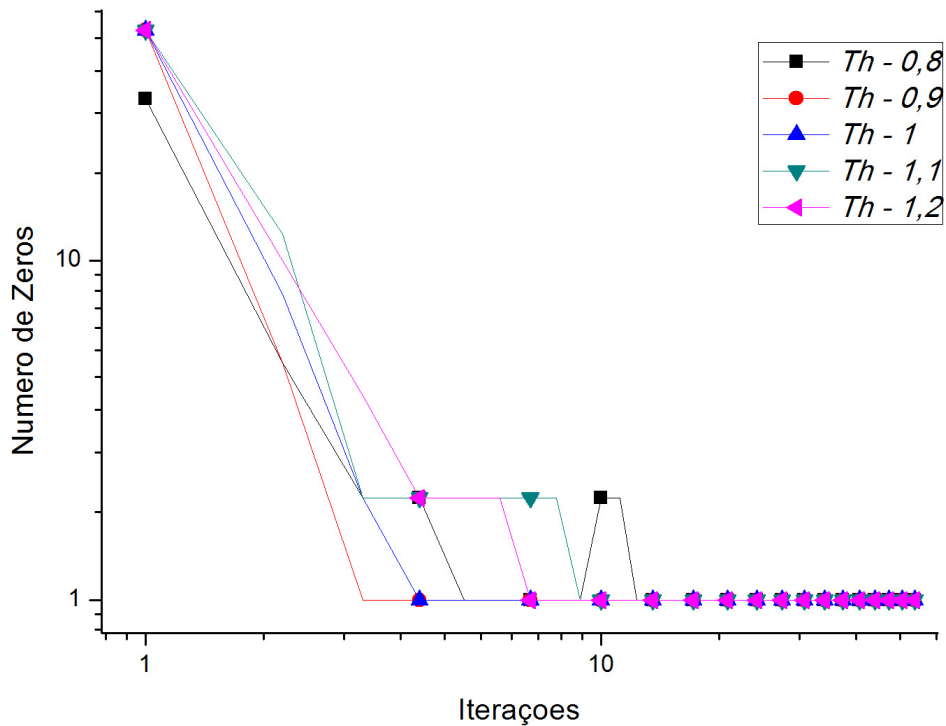


Figura 6. Avaliação da convergência do ACO no problema Att48 com variação de limiar para $\rho = 0,1$.

Na Figura 7 é possível visualizar a evolução do número de autovalores iguais a zero ao longo das 50 iterações, para esta simulação foi utilizado o valor de ρ igual a 0,5 e uma variação de limiar th de 0,8 até 1,2. Novamente, pode-se perceber que poucas iterações são necessárias para atingir a convergência, assim podendo parar a execução do algoritmo antes do fim das iterações diminuindo o custo computacional da execução.

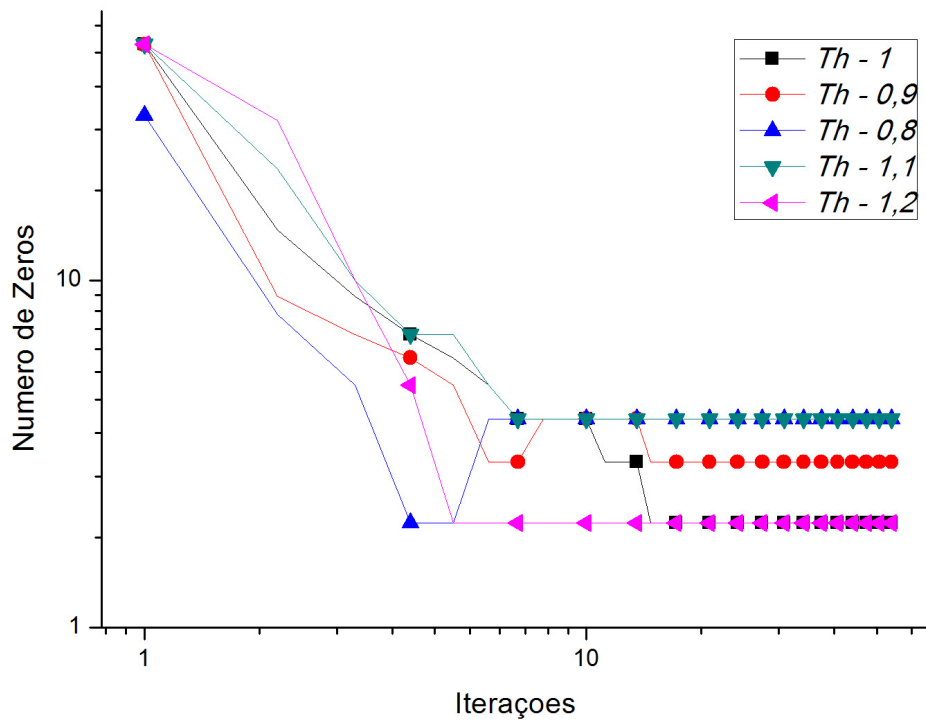


Figura 7. Avaliação da convergência do ACO no problema Att48 com variação de limiar para $\rho = 0,5$.

4.3.3 Resultados para o problema pr76

Como o problema pr76 possui mais cidades os valores utilizados para ρ são menores, o gráfico também está em escala logarítmica e o resultado mostra apenas as 50 primeiras iterações, com o mesmo intuito de focar no momento da execução em que algoritmo entra em estagnação.

É possível observar na Figura 8 que utilizando o valor de ρ igual a 0,1 o comportamento do algoritmo para este problema foi semelhante ao comportamento para o problema att48, porém estagnando com um pouco mais de iterações.

Porém, na Figura 9 é possível observar que utilizando o valor de ρ igual a 0,3 o único valor de limiar que levou a matriz de feromônio a estar conectada foi o limiar th de valor igual a 0,2 e que todos os outros valores de limiar não permitiram chegar a uma matriz de feromônio conectada, se mantendo sempre com a quantidade de

autovalores iguais a zero igual a quantidade de cidades, indicando que o grafo de feromônio esta formado apenas por ilhas.

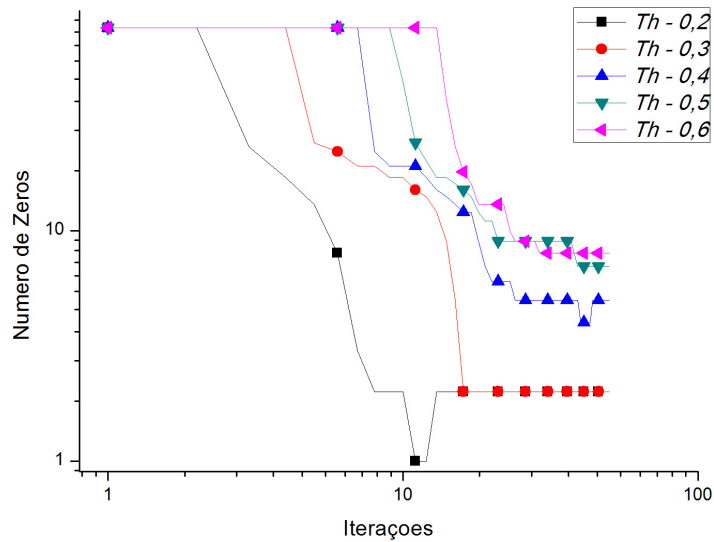


Figura 8. Avaliação da convergência do ACO no problema Pr76 com variação de limiar para $\rho = 0,1$.

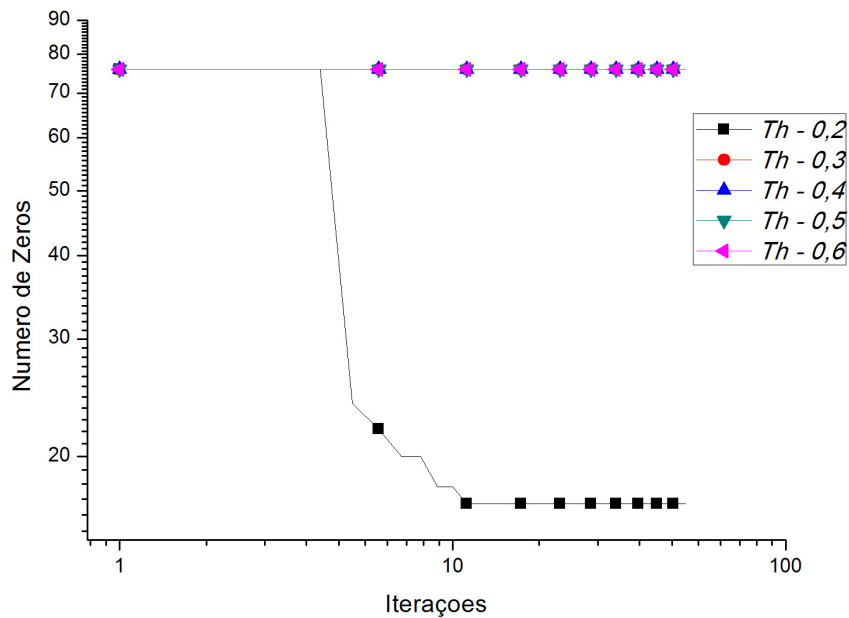


Figura 9. Avaliação da convergência do ACO no problema Pr76 com variação de limiar para $\rho = 0,3$.

5 Conclusões e Trabalhos Futuros

“A ciência não é uma ilusão, mas seria uma ilusão acreditar que poderemos encontrar noutro lugar o que ela não nos pode dar.”

-Sigmund Freud.

Neste trabalho de conclusão de curso foi proposta uma nova avaliação do estado de convergência do algoritmo de otimização baseado em colônia de formigas (ACO, *Ant Colony Optimization*) utilizando uma métrica conhecida de redes complexas, com o intuito de contribuir com as pesquisas na área de inteligência de enxames e, mais especificamente, com as pesquisas relacionadas aos algoritmos baseados em colônia de formigas.

Neste capítulo, serão feitas considerações finais sobre os resultados obtidos e, por fim, serão apresentados os trabalhos futuros.

5.1 Conclusões

A utilização de métricas de redes complexas para avaliação do estado de convergência do ACO mostrou-se interessante, pois, de acordo com os resultados discutidos na seção anterior, pode-se inferir o estado de convergência do algoritmo baseando-se apenas no número de autovalores iguais a zero da Matriz Laplaciana construída a partir da matriz de feromônio.

A avaliação feita neste trabalho consiste em calcular os autovalores da matriz Laplaciana fornecida pelo ACO e colher as informações contidas nos autovalores. Os resultados mostrados neste trabalho utilizam o número de autovalores iguais a zero, isto é, a quantidade de ilhas contidas no grafo, como o grafo de feromônio está relacionado à comunicação entre as formigas no ACO, quanto mais ilhas no grafo indica uma fraca comunicação e menos ilhas indica uma forte comunicação. Logo, a partir do momento que a quantidade de zeros dos autovalores reduz, a comunicação

no algoritmo aumenta. Por outro lado, quando a quantidade de zeros chega a 1 pode-se dizer que o algoritmo convergiu.

Baseando-se nestes resultados, existe a possibilidade de aperfeiçoar o algoritmo de modo a ser possível obter um indicativo mais preciso e menos dependente dos parâmetros, utilizando esta informação e outras que também podem ser extraídas do grafo de feromônio utilizando outras métricas de redes complexas.

5.2 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros desta avaliação, podem ser implementados os seguintes requisitos:

1. estudo paramétrico mais detalhado dos parâmetros utilizados;
2. emprego de outras métricas de redes complexas, que devem ser estudadas de modo a saber as mais relevantes para melhoria do algoritmo;
3. estudo das possíveis melhorias para o algoritmo, como por exemplo o critério de parada que pode ser definido pela estagnação do grafo de feromônio, outras possíveis melhorias são o aumento de diversidade, melhoria de desempenho, entre outras.

Referências Bibliográficas

- [1] Dorigo, M., *Optimization, Learning and Natural Algorithms*, Ph.D. thesis, *Dipartimento di Elettronica, Politecnico di Milano*, Itália, 1992 (Em italiano).
- [2] Dorigo, M., Maniezzo, V., and Colorni, A., *Ant System: Optimization by a colony of cooperating agents*, *IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern. – Part B*, 26(1), 29, 1996.
- [3] L. Barabasi and R. Albert. *Emergence of scaling in random networks*. *Science*, 286:509-512, 1999.
- [4] Newman, M. E. J., *Structure and Function of Complex Networks*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [5] M. A. C. Oliveira Júnior, Carmelo J. A. Bastos-Filho, and R. P. Menezes, *Assessing Particle Swarm Optimizers Using Network Science Metrics*. In: Gourab Ghoshal, Julia Poncela-Casanovas, Robert Tolksdorf. (Org.). *Complex Networks IV*. 1ed.Heidelberg: Springer-Verlag, 2013, v. 476, p. 173-184.
- [6] Bonabeau, E.; Dorigo, M.; Theraulaz, G. *Swarm intelligence: from natural to artificial systems*. New York, NY, USA: Oxford Univertisy Press, Inc., 1999.
- [7] Engelbrecht, A. P. *Computational Intelligence An Introduction*. 1. ed. West Sussex, Inglaterra: Wiley, 2002.
- [8] Kennedy, J; Eberhart, R. *Particle Swarm Optimization*. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*. 1995.
- [9] Kennedy, J.; Eberhart, R.; Shi, Y. *Swarm Intelligence*. 1. ed. São Francisco, Califórnia, USA: Morgan Kaufmann Publishers, 2001.
- [10] Basturk, Dervis Karaboga, *An Artificial Bee Colony (ABC) Algorithm for Numeric function Optimization*, *IEEE Swarm Intelligence Symposium 2006*, May 12-14, 2006, Indianapolis, Indiana, USA.

- [11] Karaboga, D.; *An Idea Based on Honey Bee Swarm for Numerical Optimization*, Technical Report-TR06, Erciyes University, Engineering Faculty, Computer Engineering Department, 2005.
- [12] D. Karaboga, B. Basturk, *Artificial Bee Colony (ABC) Optimization Algorithm for Solving Constrained Optimization Problems*, LNCS: Advances in Soft Computing: Foundations of Fuzzy Logic and Soft Computing, Vol: 4529/2007, pp: 789-798, Springer- Verlag, 2007, IFSA 2007.
- [13] M. Dorigo & K. Socha, *An Introduction to Ant Colony Optimization*. T. F. Gonzalez (Ed.), *Approximation Algorithms and Metaheuristics*, CRC Press, 2007.
- [14] Dorigo, M., Gambardella, L. M., *Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem*, IEEE Trans. on Evolutionary Computation, Vol. 1, No. 1, 1997. In press.
- [15] Ted G. Lewis. *Network Science: Theory and Application*. Wiley Publishing, 2009.
- [16] Reka Albert and Albert-Laszlo Barabasi. *Statistical mechanics of complex networks*. *Reviews of Modern Physics*, 47:74, 2002.
- [17] Albert-Laszlo Barabási. *Linked*. Perseus Publishing, 1 edition, 2002.
- [18] Albert-László Barabási, Réka Albert, and Hawoong Jeong. *Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web*. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 281(1-4):69-77, June 2000.
- [19] Hahsler, Michael and Hornik, Kurt *TSP - Infrastructure for the Traveling Salesperson Problem*. *Research Report Series / Department of Statistics and Mathematics*, 45. Department of Statistics and Mathematics, WU Vienna University of Economics and Business, Vienna. Salesperson Problem, 2006.
- [20] G. Reinelt, *Discrete and Combinatorial Optimization – TSP Library*. Disponível em: <http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/index.html> Último acesso em: 02/12/2013